CÓMO INTEGRAR DESDE CERO A EXPERTO

Javier Delgado



© 2026 Javier Delgado.

Todos los derechos reservados.

Esta obra está protegida por la legislación sobre propiedad intelectual. No se permite reproducirla, distribuirla, comunicarla públicamente ni transformarla, total o parcialmente, sin la autorización previa y por escrito del titular de los derechos, salvo en los casos permitidos por la ley.

Introducción

Si al ver una integral no sabes por dónde empezar, este libro está pensado para acompañarte desde ahí. No necesitas reconocer todos los métodos ni recordar una lista enorme de fórmulas antes de abrirlo. Sí necesitarás dedicar tiempo a los ejercicios y detenerte en los pasos que todavía no entiendas.

Vamos a partir de una idea sencilla: integrar es buscar una función cuya derivada sea la que tenemos delante. A partir de esa relación construiremos el resto. Primero aprenderemos a simplificar y reconocer estructuras; después, a utilizar los métodos y a decidir cuál puede ayudarnos en cada caso.

Quiero que sepas no solo qué operación hacemos, sino también para qué la hacemos. Por eso encontrarás explicaciones de los ajustes algebraicos, los factores y los signos que a veces parecen aparecer de repente. Si un paso te cuesta, no significa que no puedas aprenderlo. Puede que necesites separarlo en operaciones más pequeñas y volver a intentarlo.

No necesitas acertar todos los ejercicios a la primera. Un intento incompleto también sirve para descubrir dónde aparece la duda. Las soluciones te ayudarán a reconstruir el razonamiento y a volver a intentarlo con más claridad. Más adelante, el reto de cien integrales y la prueba final te permitirán reunir lo aprendido y decidir por tu cuenta cómo empezar a resolver cada integral.

No hay una velocidad obligatoria. El objetivo es que cada vez puedas explicar mejor tus decisiones y trabajar con más autonomía. Empieza por lo que sabes, identifica qué necesitas repasar y avanza un paso más.

Antes de ponernos manos a la obra, quiero compartir contigo una frase que me ha acompañado a lo largo de mi vida y que sigue inspirándome:

«La constancia es la base del éxito»

Ahora sí: prepara papel y bolígrafo. Estate muy atento, porque… ¡¡EMMPEZAMOOSSS!!

Javier Delgado

Índice general

Introducción III

0. Antes de empezar 1
- 0.1. Qué vas a aprender . . . 1
- 0.2. Cómo utilizar este libro . . . 2
- 0.3. Qué necesitas saber antes de empezar . . . 2
- 0.4. Cómo va disminuyendo la ayuda . . . 3
- 0.5. Cómo comprobar tus resultados . . . 4
- 0.6. Prueba diagnóstica inicial . . . 4
- 0.7. Mapa general del proceso de aprendizaje . . . 5
- 0.8. Soluciones razonadas de la prueba diagnóstica . . . 6

1. Introducción a las integrales 11
- 1.1. Qué es una primitiva . . . 11
- 1.2. La notación de la integral indefinida . . . 12
- 1.3. Por qué aparece la constante C . . . 13
- 1.4. Un caso especial: una primitiva concreta . . . 14
- 1.5. Comprobar una integral derivando . . . 15
- 1.6. Errores típicos . . . 16
- 1.7. Ejercicios graduados . . . 17
- 1.8. Resumen del capítulo . . . 19
- 1.9. Soluciones razonadas . . . 19

2. Simplificar antes de integrar 23
- 2.1. Linealidad y extracción de constantes . . . 23
- 2.2. Potencias, raíces y fracciones algebraicas . . . 24
- 2.3. Desarrollo y factorización . . . 26
- 2.4. División de polinomios . . . 28
- 2.5. Identidades trigonométricas necesarias . . . 29
- 2.6. Cuándo simplificar y cuándo no hacerlo . . . 31
- 2.7. Errores típicos . . . 32
- 2.8. Ejercicios graduados . . . 34
- 2.9. Resumen del capítulo . . . 37
- 2.10. Soluciones razonadas . . . 38

3. Integrales inmediatas 43
- 3.1. Potencias y polinomios . . . 43
- 3.2. Integrales que producen logaritmos . . . 46
- 3.3. Funciones exponenciales . . . 48

3.4. Funciones trigonométricas básicas . . . 50
3.5. Formas inmediatas de arcotangente y arcoseno . . . 53
3.6. Tabla razonada de primitivas . . . 55
3.7. Errores típicos . . . 57
3.8. Ejercicios graduados . . . 59
3.9. Resumen del capítulo . . . 61
3.10. Soluciones razonadas . . . 62

4. Integrales casi inmediatas 67
4.1. La regla de la cadena, al revés . . . 67
4.2. Ajustar la constante que falta . . . 68
4.3. Potencias con una función dentro . . . 70
4.4. Una función en el denominador y su derivada arriba . . . 72
4.5. Exponenciales compuestas . . . 73
4.6. Trigonométricas compuestas . . . 75
4.7. Arcotangente y arcoseno compuestos . . . 78
4.8. Reconocer la estructura antes de calcular . . . 82
4.9. Errores típicos . . . 84
4.10. Ejercicios graduados . . . 86
4.11. Resumen del capítulo . . . 90
4.12. Soluciones razonadas . . . 90

5. Cambio de variable 97
5.1. Del ajuste de constantes al cambio de variable . . . 97
5.2. Qué es un cambio de variable y por qué funciona . . . 98
5.3. Cómo elegir la nueva variable . . . 99
5.4. Transformar la integral completa . . . 100
5.5. Sustituciones lineales . . . 101
5.6. Sustituciones algebraicas . . . 102
5.7. Sustituciones con radicales . . . 103
5.8. Sustituciones trigonométricas simples . . . 104
5.9. Volver a la variable original . . . 105
5.10. Sustituciones que no simplifican . . . 106
5.11. Guía para reconocer el cambio adecuado . . . 107
5.12. Errores típicos . . . 108
5.13. Ejercicios graduados . . . 110
5.14. Resumen del capítulo . . . 113
5.15. Soluciones razonadas . . . 114

6. Integración por partes 121
6.1. La fórmula y una frase para recordarla . . . 121
6.2. Cómo elegir u y dv: ALPES . . . 122
6.3. La primera aplicación, sin saltarnos pasos . . . 123
6.4. Polinomios por exponenciales, senos y cosenos . . . 123

6.5. Logaritmos . . . 125
6.6. Funciones trigonométricas inversas . . . 126
6.7. Aplicar el método por partes varias veces . . . 128
6.8. Casos cíclicos sencillos . . . 129
6.9. Antes de decidirte por partes . . . 131
6.10. Errores típicos . . . 132
6.11. Ejercicios graduados . . . 135
6.12. Resumen del capítulo . . . 137
6.13. Soluciones razonadas . . . 138

7. Integrales de funciones racionales 147
7.1. Antes de descomponer: mira y simplifica . . . 147
7.2. Si el numerador tiene igual o mayor grado . . . 148
7.3. Dos factores lineales distintos . . . 149
7.4. Tres factores lineales distintos . . . 151
7.5. Factores lineales repetidos . . . 152
7.6. Cuadráticas que no se pueden factorizar en los reales . . . 153
7.7. Un factor lineal y una cuadrática irreducible . . . 155
7.8. Dividir, descomponer e integrar . . . 155
7.9. Un camino para decidir . . . 156
7.10. Errores típicos . . . 158
7.11. Ejercicios graduados . . . 160
7.12. Resumen del capítulo . . . 163
7.13. Soluciones razonadas . . . 164

8. Integrales trigonométricas esenciales 173
8.1. Entender bien lo que está escrito . . . 173
8.2. Buscar una derivada antes de transformar . . . 174
8.3. Integrar el seno y el coseno al cuadrado . . . 174
8.4. Separar un factor cuando la potencia es impar . . . 176
8.5. Potencias pares: bajar el exponente . . . 177
8.6. Productos con argumentos distintos . . . 179
8.7. Potencias sencillas de la tangente . . . 180
8.8. Cómo elegir el primer paso . . . 183
8.9. Errores típicos . . . 183
8.10. Ejercicios graduados . . . 185
8.11. Resumen del capítulo . . . 188
8.12. Soluciones razonadas . . . 189

9. Cómo elegir el método de integración 197
9.1. Simplificar antes de decidir . . . 197
9.2. Reconocer una función junto a su derivada . . . 198
9.3. Elegir según la estructura . . . 199
9.4. Cuando hacen falta dos técnicas . . . 201

9.5. Comparar caminos y cambiar de rumbo . . . 203
9.6. Un selector para orientar el primer paso . . . 206
9.7. Errores típicos . . . 207
9.8. Ejercicios graduados sin indicar la técnica . . . 208
9.9. Resumen del capítulo . . . 211
9.10. Soluciones razonadas . . . 211

10. Reto final: 100 integrales de cero a experto **221**

A. Tabla de primitivas **229**
A.1. Formas inmediatas . . . 229
A.2. Cuando aparece una función dentro . . . 231

B. Selector de métodos **233**
B.1. Qué comprobar antes de elegir . . . 233
B.2. Si consideras el método por partes . . . 234
B.3. Si tienes una fracción de polinomios . . . 234
B.4. Si aparecen senos, cosenos o tangentes . . . 235
B.5. Cuándo volver a mirar y cuándo terminar . . . 235

C. Identidades necesarias **237**
C.1. Álgebra para preparar el integrando . . . 237
C.2. Reescribir sin cambiar el valor . . . 238
C.3. Identidades trigonométricas . . . 239
C.4. Recordatorio de los puntos excluidos . . . 240

D. Errores típicos **241**

E. Soluciones completas del reto **245**

F. Vídeos y recursos de apoyo **303**

G. Prueba final de dominio **305**
G.1. Diez integrales sin pistas . . . 305
G.2. Soluciones razonadas . . . 307
G.3. Qué te dice tu resultado . . . 312

Conclusión **313**

Sobre el autor **315**

Otros libros de Javier Delgado **317**

CAPÍTULO 1

Introducción a las integrales

Integrar es recorrer el camino inverso de derivar.

Ha llegado el momento de empezar a integrar. Aunque este tema parezca nuevo, su idea principal nace de algo que ya sabes hacer: derivar.

Cuando derivamos, partimos de una función y calculamos su derivada. Al integrar, recorremos el camino contrario: conocemos el resultado de una derivada y buscamos una función que, al derivarla, lo produzca. Las funciones que encontramos al recorrer ese camino reciben el nombre de **primitivas** o **antiderivadas**.

Esta idea será nuestro punto de partida, pero hay un detalle fundamental: las constantes desaparecen al derivar. Por eso, al recorrer el camino inverso, no recuperamos una única función. Primero entenderemos qué buscamos; después aprenderemos a escribir todas las respuestas posibles y a encontrarlas.

1.1. Qué es una primitiva

Empecemos por una derivada que ya conoces:

$$f(x) = x^2 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 2x$$

La flecha muestra el camino de la derivación: $f(x) = x^2$ produce $f'(x) = 2x$. Ahora recorremos esa misma relación en sentido contrario: si conocemos $2x$, nos preguntamos qué función debemos derivar para obtenerlo.

A partir de ahora, para distinguir los dos papeles, llamaremos $f(x)$ a la función conocida y $F(x)$ a una de sus primitivas. En este ejemplo, la función conocida es:

$$f(x) = 2x$$

Una posible respuesta:

$$F(x) = x^2$$

Lo comprobamos:

$$F(x) = x^2 \quad \longrightarrow \quad F'(x) = 2x = f(x)$$

Como al derivar $F(x)$ recuperamos $f(x)$, decimos que $F(x) = x^2$ es una **primitiva** de $f(x) = 2x$. Usamos la letra F mayúscula para distinguir la primitiva de la función conocida; la mayúscula no significa que sea la única.

Definición. Una función $F(x)$ es una primitiva, o antiderivada, de $f(x)$ en un intervalo cuando su derivada coincide con $f(x)$ para todos los valores de x de ese intervalo. En símbolos:

$$F'(x) = f(x)$$

Dicho de una forma sencilla: una primitiva es una función de la que pudo salir $f(x)$ al derivar.

Pero observa lo que ocurre si añadimos una constante a x^2:

$$F_1(x) = x^2 + 5 \quad \longrightarrow \quad F_1'(x) = 2x$$
$$F_2(x) = x^2 - 3 \quad \longrightarrow \quad F_2'(x) = 2x$$

¡ATENCIÓN! Las constantes desaparecen al derivar. Por eso x^2, $x^2 + 5$ y $x^2 - 3$ son primitivas de la misma función $f(x) = 2x$. Y no son las únicas: podemos sumar cualquier constante real a x^2 y la derivada seguirá siendo $2x$. No buscamos una única respuesta, sino una familia infinita de primitivas. En la siguiente sección aprenderemos a reunirlas en una sola expresión utilizando $+C$.

Por ahora, quédate con esta pregunta:

¿Qué función tendría que derivar para obtener $f(x)$?

1.2. La notación de la integral indefinida

Podríamos seguir escribiendo primitivas de $2x$, pero nunca terminaríamos. Para reunir toda esa familia en una sola expresión utilizamos la integral indefinida:

$$\int 2x \, \mathrm{d}x = x^2 + C$$

Esta expresión se lee «la integral de $2x$ respecto de x es $x^2 + C$». Es una forma compacta de escribir todas las funciones cuya derivada es $2x$.

Vamos a leerla símbolo por símbolo.

- El signo $\int$ indica que estamos buscando primitivas.
- El **integrando** $2x$ es la función que debemos recuperar al derivar.
- El **diferencial** $\mathrm{d}x$ indica que integramos respecto de x. No está de adorno.
- El resultado $x^2 + C$ representa la familia completa de primitivas.

En general, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en un intervalo, es decir, si $F'(x) = f(x)$ en él, escribimos:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C$$

La expresión de la izquierda es la **integral indefinida**; la de la derecha reúne todas las primitivas de $f(x)$ en ese mismo intervalo.

Cuando veas una integral, la escritura será distinta, pero la pregunta sigue siendo la misma:

¿Qué función tendría que derivar para obtener el integrando?

1.3. Por qué aparece la constante C

En el resultado $x^2 + C$, la letra C puede representar cualquier número real. Por eso recibe el nombre de **constante de integración**.

Cada valor de C produce una primitiva diferente:

$$\begin{aligned} C = 0 &\longrightarrow x^2 \\ C = 5 &\longrightarrow x^2 + 5 \\ C = -3 &\longrightarrow x^2 - 3 \end{aligned}$$

Las tres funciones son distintas, pero todas tienen la misma derivada. Podemos comprobar toda la familia de una sola vez:

$$F(x) = x^2 + C \quad \longrightarrow \quad F'(x) = 2x$$

La constante desaparece al derivar, así que recuperamos exactamente $2x$ para cualquier valor de C.

En un mismo intervalo, todas las primitivas de una función se obtienen sumando una constante a cualquiera de ellas. Por eso $+C$ recoge todas las posibilidades: basta con encontrar una primitiva y añadir la constante.

Esta diferencia es fundamental. $x^2 + 5$ es una **primitiva concreta** de $2x$; en cambio, $x^2 + C$ representa la **familia completa** de primitivas.

¡ATENCIÓN! Aunque escribimos $+C$, la constante puede ser positiva, negativa o cero. No es un adorno: si la omites, habrás encontrado una primitiva, pero no la familia completa.

Antes de dar por terminada una integral indefinida, hazte siempre esta pregunta:

¿Mi resultado representa una sola primitiva o toda la familia?

1.4. Un caso especial: una primitiva concreta

Una integral indefinida se escribe con $+C$, porque su resultado representa una familia completa de primitivas. Pero un ejercicio puede pedirnos que elijamos una de ellas: por ejemplo, la que pasa por un punto dado.

Si $F(x)$ pasa por (a, b), significa que $F(a) = b$. Utilizamos esa igualdad para calcular el valor de C. Seguimos trabajando con primitivas e integrales indefinidas: es un tipo particular de ejercicio, no un nuevo método de integración.

Ejemplo guiado. Encuentra la primitiva $F(x)$ de $f(x) = 2x$ que pasa por el punto $(1, 4)$

1. Encontramos la familia de primitivas.

$$\int 2x \, \mathrm{d}x = x^2 + C$$

Por tanto, las posibles primitivas tienen la forma $F(x) = x^2 + C$.

2. Utilizamos el punto.

Que la función pase por $(1, 4)$ significa que $F(1) = 4$. Sustituimos en la expresión de $F(x)$:

$$\begin{aligned} F(1) &= 4 \\ 1^2 + C &= 4 \\ C &= 3 \end{aligned}$$

3. Escribimos la primitiva concreta.

$$F(x) = x^2 + 3$$

Al principio escribimos $+C$ porque teníamos toda la familia. Una vez calculado $C = 3$, no añadimos otra constante: el punto ha seleccionado una única primitiva.

4. Comprobamos las dos condiciones.

Comprobamos la derivada y, después, el punto:

$$\begin{gathered} F(x) = x^2 + 3 \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = 2x = f(x) \\ F(1) = 1^2 + 3 = 4 \end{gathered}$$

La derivada confirma que estamos en la familia correcta; el punto identifica qué miembro de esa familia es.

¡ATENCIÓN! Solo determinamos C cuando el enunciado aporta una condición adicional, que debemos aplicar a la primitiva $F(x)$, no al integrando $f(x)$. Si no hay ninguna condición, la respuesta se deja con $+C$.

1.5. Comprobar una integral derivando

Cuando termines una integral, puedes comprobar el resultado si quieres asegurarte de que es correcto. Para hacerlo, deriva tu respuesta y comprueba si vuelves a llegar al integrando.

La comprobación no es obligatoria y tampoco vuelve a resolver la integral ni te dice qué método debías elegir. Es una herramienta muy útil para verificar el resultado y detectar errores. Cuando decidas utilizarla, el proceso será siempre el mismo: **deriva, simplifica y compara**. Si las expresiones parecen distintas, simplifícalas antes de decidir; pueden estar escritas de formas diferentes y ser equivalentes.

Un resultado correcto. Supón que hemos obtenido:

$$\int (4x + 3)\ \mathrm{d}x = 2x^2 + 3x + C$$

El integrando es $f(x) = 4x + 3$. Derivamos el resultado:

$$F(x) = 2x^2 + 3x + C \quad \longrightarrow \quad F'(x) = 4x + 3 = f(x)$$

Hemos vuelto a llegar exactamente al integrando, así que el resultado es correcto.

La comprobación detecta un error. Ahora el integrando es $f(x) = 6x$. Supón que, para $\int 6x\ \mathrm{d}x$, alguien propone $G(x) = 6x^2 + C$. Antes de aceptarlo, derivamos:

$$G(x) = 6x^2 + C$$
$$G'(x) = 12x$$

Para que sea una primitiva, la derivada debe coincidir con $6x$ para todos los valores de x, no solo para alguno. Aquí no ocurre, así que la respuesta es incorrecta. Como al derivar x^2 obtenemos $2x$, necesitamos multiplicar por 3 para llegar a $6x$. Con $F(x) = 3x^2 + C$, la comprobación ahora sí funciona:

$$F(x) = 3x^2 + C \quad \longrightarrow \quad F'(x) = 6x = f(x)$$

Por tanto, $\int 6x\ \mathrm{d}x = 3x^2 + C$.

Hay algo que esta comprobación no puede detectar: que hayas olvidado $+C$, porque una constante desaparece al derivar. Debes realizar dos controles: volver a llegar exactamente al integrando y escribir $+C$ en toda integral indefinida.

Si decides comprobar tu resultado, termina haciéndote esta pregunta:

¿Al derivar mi resultado vuelvo a llegar exactamente al integrando?

1.6. Errores típicos

Antes de seguir, vamos a reunir cuatro errores típicos relacionados con las ideas de este capítulo. No se trata de memorizar una lista: se trata de tener claro qué estamos buscando cuando integramos.

Error típico 1. Derivar cuando te piden integrar.

Si te piden integrar $8x$ y respondes 8, has calculado la derivada del integrando. Has recorrido el camino contrario al que necesitabas. Debemos buscar una función cuya derivada sea $8x$.

Como la derivada de x^2 es $2x$, probamos con la primitiva $F(x) = 4x^2 + C$. Su derivada es $F'(x) = 4 \cdot 2x = 8x$, porque C desaparece al derivar. Por tanto:

$$\int 8x \ \mathrm{d}x = 4x^2 + C$$

Error típico 2. Encontrar una primitiva y olvidar la familia.

Una primitiva concreta puede ser correcta y, aun así, no representar toda la familia. Si el enunciado pide una integral indefinida, debemos añadir $+C$ para incluir las demás primitivas. Recuerda que comprobar la derivada no detectará este olvido: la constante desaparece al derivar.

Error típico 3. Intentar calcular siempre la constante.

La letra C no indica que el ejercicio esté a medias. Si no hay una condición adicional, dejar $+C$ es precisamente lo correcto. Solo buscamos un valor concreto cuando el enunciado lo permite, por ejemplo, al indicar un punto por el que pasa la primitiva.

Error típico 4. Aceptar una respuesta porque se parece a la correcta.

Veamos ahora la integral de $10x$. Acertar la potencia no basta: el coeficiente también tiene que ser el adecuado. Compara estas dos respuestas:

Incorrecto: $\int 10x \ \mathrm{d}x = 10x^2 + C$

Correcto: $\int 10x \ \mathrm{d}x = 5x^2 + C$

La propuesta $G(x) = 10x^2 + C$ tiene derivada $G'(x) = 10 \cdot 2x = 20x$, que no coincide con el integrando. En cambio, $F(x) = 5x^2 + C$ tiene derivada $F'(x) = 5 \cdot 2x = 10x$. Añadir $+C$ no arregla un coeficiente equivocado, porque la constante desaparece al derivar.

Con estas ideas claras, ya podemos pasar a la práctica: reconocer primitivas, escribir familias completas y comprobar resultados cuando lo necesitemos.

1.7. Ejercicios graduados

Ahora te toca poner en práctica lo que hemos visto. Todavía no necesitas una tabla de integrales: puedes apoyarte en las derivadas que ya conoces y recorrer el camino inverso.

La ayuda irá disminuyendo. Trabaja en tu cuaderno y consulta las soluciones del apartado 1.9 después de intentarlo. Para localizar cada solución, busca el mismo código que aparece en el enunciado. En algunos ejercicios te pediré expresamente que derives para practicar la comprobación; eso no significa que tengas que hacerlo siempre al resolver una integral.

C1-01 Leer una integral

Con ayuda

Observa esta expresión:

$$\int 5 \, \mathrm{d}x = 5x + C$$

Identifica el integrando, la variable respecto de la que integramos y el significado de C. Después escribe una primitiva concreta $F(x)$ y compruébala derivando.

Para orientarte, separa los dos lados: a la izquierda aparece la función conocida; a la derecha, la familia de funciones que pueden producirla al derivar. Puedes elegir $C = 0$ para obtener una primitiva concreta.

C1-02 Reconocer primitivas

Con ayuda

Decide cuáles de estas funciones son primitivas de $f(x) = 3x^2$:

a) $x^3 + 4$ b) $3x^2$ c) $x^3 - 2$

Deriva cada candidata y compara con $3x^2$. Si una constante desaparece, no la uses como motivo para descartar la función. Después escribe la integral indefinida de $3x^2$ y explica por qué puede haber más de una candidata correcta.

C1-03 De una primitiva a toda la familia

Con una pista

Comprueba que $F_0(x) = 2x^2 - 5x$ es una primitiva de $f(x) = 4x - 5$. Escribe la integral indefinida y elige dos primitivas concretas distintas.

Pista. ¿Qué puedes sumar a $F_0(x)$ sin cambiar su derivada?

C1-04 Detectar un coeficiente incorrecto

Con una pista

Para la integral $\int 12x^2 \, \mathrm{d}x$, alguien propone $g(x) = 12x^3 + C$. Comprueba si esa respuesta es correcta y corrígela si es necesario.

Pista. Si pruebas con $F(x) = ax^3 + C$, siendo a un número constante, su derivada será $F'(x) = 3ax^2$. Elige a para llegar al integrando.

C1-05 Recorrer el camino inverso

Sin pista

Encuentra la familia de primitivas:

$$\int (6x^2 - 4x)\ \mathrm{d}x$$

C1-06 ¿Está terminada la respuesta?

Sin pista

Al resolver $\int 9x^2\ \mathrm{d}x$, una persona responde $F(x) = 3x^3$ y afirma: «He derivado mi respuesta, da $9x^2$, así que la integral indefinida está completa».

¿Qué parte de su razonamiento es correcta y qué le falta? Escribe la respuesta completa.

C1-07 Dos escrituras, un resultado

Sin pista

Para $\int (2x + 4)\ \mathrm{d}x$ se proponen estas dos respuestas:

$$F_1(x) = x^2 + 4x + C \qquad F_2(x) = x(x + 4) + C$$

¿Pueden ser correctas las dos? Justifica tu respuesta y compruébala por derivación.

C1-08 Elegir una primitiva concreta

Opcional

Este ejercicio repasa el caso especial del apartado 1.4. La familia de primitivas de $f(x) = 6x^2$ es $F(x) = 2x^3 + C$. Encuentra la primitiva que pasa por $(1, 1)$ y comprueba tanto la derivada como el punto.

1.8. Resumen del capítulo

Antes de continuar, quédate con estas ideas. No necesitas aprenderlas como frases de memoria: necesitas reconocer qué significa cada una cuando tengas una integral delante.

Integrar es recorrer el camino inverso de derivar. Conocemos el integrando $f(x)$ y buscamos una primitiva $F(x)$ cuya derivada sea precisamente $f(x)$.

Una primitiva es una función; la integral indefinida reúne toda la familia. En un mismo intervalo, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, escribimos:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C$$

La constante no es un adorno. C puede ser cualquier número real: positivo, negativo o cero. Las primitivas de la familia cambian, pero su derivada es la misma.

Solo determinamos C si hay una condición adicional. Si el enunciado no la aporta, dejar $+C$ es una respuesta terminada, no un ejercicio a medias.

Puedes comprobar una respuesta derivándola. Si decides hacerlo, deriva, simplifica y compara con el integrando. Recuerda que esa comprobación no detecta por sí sola que hayas olvidado $+C$.

Antes de avanzar, vuelve a la pregunta que da sentido a todo el capítulo:

¿Qué función tendría que derivar para obtener el integrando?

En el próximo capítulo empezaremos a preparar las integrales antes de resolverlas. Muchas veces, el primer paso útil no será aplicar una fórmula, sino escribir el integrando de una manera más sencilla.

1.9. Soluciones razonadas

Compara estas soluciones con tu intento. Si te has equivocado, localiza el primer paso que cambiarías y explica por qué. En este capítulo importa tanto reconocer una respuesta correcta como entender qué representa.

C1-01 Leer una integral

El integrando es 5, no $5x$: es la función que aparece a la izquierda, dentro de la integral. El diferencial $\mathrm{d}x$ indica que integramos respecto de x.

A la derecha, $5x + C$ reúne las primitivas. La letra C representa cualquier constante real. Si elegimos $C = 0$, obtenemos la primitiva concreta $F(x) = 5x$, cuya derivada es 5.

La familia completa también cumple la comprobación:

$$F(x) = 5x + C \quad \longrightarrow \quad F'(x) = 5$$

Por eso $5x$ sirve como una primitiva concreta, mientras que la integral indefinida se escribe con $+C$.

C1-02 Reconocer primitivas

Derivamos las tres candidatas. En a) y c), las constantes desaparecen:

a) Derivada: $3x^2$

b) Derivada: $6x$

c) Derivada: $3x^2$

Son primitivas de $3x^2$ las funciones de **a) y c)**, porque sus derivadas coinciden con el integrando. La de b) no lo es: su derivada es $6x$, no $3x^2$.

Los términos $+4$ y -2 solo eligen miembros distintos de la misma familia. La integral indefinida es:

$$\int 3x^2 \, \mathrm{d}x = x^3 + C$$

Para cualquier constante C, la primitiva $F(x) = x^3 + C$ cumple $F'(x) = 3x^2$.

C1-03 De una primitiva a toda la familia

Primero derivamos la función dada:

$$F_0(x) = 2x^2 - 5x \quad \longrightarrow \quad F_0'(x) = 4x - 5$$

Coincide con el integrando, así que es una primitiva. Para reunir toda la familia añadimos una constante:

$$\int (4x - 5) \, \mathrm{d}x = 2x^2 - 5x + C$$

Por ejemplo, podemos elegir $C = 2$ y $C = -3$:

$$F_1(x) = 2x^2 - 5x + 2 \qquad \text{y} \qquad F_2(x) = 2x^2 - 5x - 3$$

Las dos derivadas son $4x - 5$, porque las constantes desaparecen. Si has elegido otras dos constantes distintas, tus primitivas también son correctas.

C1-04 Detectar un coeficiente incorrecto

La propuesta no funciona. Al derivarla obtenemos:

$$g(x) = 12x^3 + C \quad \longrightarrow \quad g'(x) = 36x^2$$

No hemos vuelto a llegar al integrando $12x^2$. El problema está en el coeficiente: al derivar una potencia cúbica, el 3 baja multiplicando. Necesitamos un número que, multiplicado por 3, dé 12:

$$3a = 12 \quad \Longrightarrow \quad a = 4$$

Por tanto:

$$\int 12x^2 \, \mathrm{d}x = 4x^3 + C$$

Ahora sí: con $F(x) = 4x^3 + C$, obtenemos $F'(x) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$.

C1-05 Recorrer el camino inverso

Nos apoyamos en dos derivadas conocidas. La derivada de $2x^3$ es $6x^2$, y la de $-2x^2$ es $-4x$. Juntas producen los dos términos que necesitamos. Añadimos $+C$ para representar la familia completa:

$$\int (6x^2 - 4x)\ \mathrm{d}x = 2x^3 - 2x^2 + C$$

Lo comprobamos:

$$F(x) = 2x^3 - 2x^2 + C \quad \longrightarrow \quad F'(x) = 6x^2 - 4x$$

Fíjate en el signo menos: debe conservarse para que la derivada produzca $-4x$, no $+4x$.

C1-06 ¿Está terminada la respuesta?

La comprobación está bien: si $F(x) = 3x^3$, entonces $F'(x) = 9x^2$. Por tanto, ha encontrado una primitiva correcta.

Lo que falta es representar toda la familia. No hay ninguna condición que permita elegir una sola primitiva, así que la respuesta completa es:

$$\int 9x^2\ \mathrm{d}x = 3x^3 + C$$

La derivada de $3x^3 + C$ sigue siendo $9x^2$. Precisamente por eso la comprobación no detectaba que faltaba la constante.

C1-07 Dos escrituras, un resultado

Sí, las dos respuestas son correctas. Primero aplicamos la propiedad distributiva:

$$x(x + 4) + C = x^2 + 4x + C$$

No son dos resultados incompatibles: es la misma expresión escrita de dos maneras. Usando la forma desarrollada, comprobamos:

$$F(x) = x^2 + 4x + C \quad \longrightarrow \quad F'(x) = 2x + 4$$

Por tanto:

$$\int (2x + 4)\ \mathrm{d}x = x^2 + 4x + C$$

También puedes dejarla como $x(x+4)+C$. Antes de rechazar una respuesta porque tiene otro aspecto, comprueba si las expresiones son equivalentes.

C1-08 Elegir una primitiva concreta

La familia ya está dada: $F(x) = 2x^3 + C$. Para escoger la primitiva que pasa por $(1, 1)$, utilizamos la condición $F(1) = 1$:

$$2 \cdot 1^3 + C = 1$$
$$2 + C = 1$$
$$C = -1$$

La primitiva concreta es:

$$F(x) = 2x^3 - 1$$

Comprobamos las dos condiciones:

$$F'(x) = 6x^2 = f(x)$$
$$F(1) = 2 \cdot 1^3 - 1 = 1$$

No añadimos otra C: el punto ya ha seleccionado una única función de la familia.

Si ahora distingues una primitiva de toda la familia y sabes por qué la comprobación funciona, tienes la base que necesitamos para seguir. En el siguiente capítulo aprenderemos a simplificar antes de integrar.