CÓMO DERIVAR DESDE CERO A EXPERTO

Javier Delgado



© 2025 Javier Delgado.

Todos los derechos reservados.

Este libro, incluyendo su contenido, textos, ejemplos, ejercicios, diagramas y cualquier material complementario relacionado con el estudio de derivadas, está protegido por las leyes de derechos de autor nacionales e internacionales. Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida, distribuida, transmitida, almacenada en un sistema de recuperación de datos o utilizada de ninguna forma o por ningún medio (electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros) sin el permiso expreso y por escrito del titular de los derechos de autor, salvo en los casos permitidos por la ley aplicable.

Índice General

INTRODUCCIÓN **7**

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LAS DERIVADAS **11**

1.1. ¿QUÉ ES LA DERIVADA? 12
1.2. TASA DE VARIACIÓN MEDIA (T.V.M.) 15
1.3. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO POR LA DEFINICIÓN 17
1.4. FUNCIÓN DERIVADA POR LA DEFINICIÓN 20

CAPÍTULO 2. REGLAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN **23**

2.1. FORMULARIO COMPLETO 24
2.2. DERIVADA DE UN NÚMERO 27
2.3. INTRODUCCIÓN A EXPONENTES Y RAÍCES 30
2.4. DERIVADA DE LA POTENCIA 35
2.5. DERIVADA DE LA SUMA Y RESTA 39
2.6. DERIVADA DE UN NÚMERO POR UNA FUNCIÓN 43
2.7. DERIVADA DE LA MULTIPLICACIÓN 47
2.8. DERIVADA DE LA DIVISIÓN 52
2.9. DERIVADAS DE RAÍCES CUADRADAS 56
2.10. DERIVADAS DE RAÍCES DE CUALQUIER ORDEN 63

CAPÍTULO 3. DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS **69**

3.1. DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES EN BASE *E* 70
3.2. DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES CON BASE DISTINTA DE *E* 74
3.3. DERIVADAS DE LOGARITMOS NEPERIANOS 79
3.4. DERIVADAS DE LOGARITMOS DE CUALQUIER BASE 83

CAPÍTULO 4. DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS **89**

4.1. DERIVADA DEL SENO 90
4.2. DERIVADA DEL COSENO 93
4.3. DERIVADA DE LA TANGENTE 96
4.4. DERIVADA DEL ARCOSENO 99
4.5. DERIVADA DEL ARCOCOSENO 102
4.6. DERIVADA DEL ARCOTANGENTE 106

CAPÍTULO 5. REGLA DE LA CADENA **109**

5.1. EJERCICIOS RESUELTOS DE FÁCIL A DIFÍCIL 110
5.2. 10 DERIVADAS AVANZADAS 116
5.3. 5 DERIVADAS PRIME 119

CAPÍTULO 6. MIX DE 50 DERIVADAS BÁSICAS **125**

6.1. DERIVADAS A RESOLVER 126
6.2. RESOLUCIONES 129

CAPÍTULO 7. MIX DE 50 DERIVADAS NIVEL MEDIO 141

7.1. DERIVADAS A RESOLVER 142
7.2. RESOLUCIONES 145

CAPÍTULO 8. MIX DE 50 DERIVADAS AVANZADAS 157

8.1. DERIVADAS A RESOLVER 158
8.2. RESOLUCIONES 161

CAPÍTULO 9. MIX DE 25 DERIVADAS NIVEL PRIME 177

9.1. DERIVADAS A RESOLVER 178
9.2. RESOLUCIONES 180

CONCLUSIÓN 189

SOBRE EL AUTOR 191

Introducción

¡Bienvenid@ a este viaje por las derivadas!

Si estás aquí, es porque quieres aprender a derivar de verdad y aprobar los próximos exámenes con muy buena nota. No importa si es la primera vez que ves derivadas o si ya tienes experiencia y quieres mejorar. Este libro es para ti.

Desde el principio tenía claro que quería hacer un **libro distinto**. No uno lleno de teoría densa, explicaciones innecesarias y fórmulas sin sentido. Aquí vas a aprender derivadas haciendo derivadas. Así de simple. El único tema más "duro" es el capítulo 1, teoría fundamental para que comprendas bien las derivadas y lo que estamos haciendo. A partir del capítulo 2, *full focused* y a resolver derivadas.

En estas páginas encontrarás **379 ejercicios resueltos paso a paso**, desde lo más básico hasta nivel avanzado. Cada capítulo está pensado para que avances poco a poco, sin darte cuenta, hasta que dentro de poco estés resolviendo derivadas complejas y digas:

"¡Pero si esto ya me sale solo!"

Todos estos ejercicios los he escogido pensando en tu siguiente examen, son super didácticos y típicos. La gran mayoría ya han caído más veces. Te los explicaré con calma y verás que se te hace sencillo. Algo importante que te quiero comentar: vas a notar que hay espacios en blanco junto a los ejercicios. Tranquil@, no es un fallo de impresión ni un error de diseño, ¡lo hice a propósito! Esos espacios están ahí para que los llenes con tus anotaciones, tus trucos o lo que quieras. Así el libro se convierte en algo tuyo de verdad, personalizado a tu estilo.

Además, a lo largo del libro te señalaré los **errores más comunes** y te daré **trucos** para que derives **más rápido y sin fallos**. Sé dónde suelen atascarse los estudiantes porque he enseñado a miles de alumnos, así que este libro está diseñado para que no te pase lo mismo y tengas una base muy sólida.

¿Cómo está estructurado el libro?

- **Capítulos progresivos** → Vamos desde lo más básico a lo más avanzado.
- **379 ejercicios resueltos al detalle** → Con todo el paso a paso.
- **Trucos y consejos** → Para que mejores tu velocidad y precisión al derivar.
- **Dudas y errores típicos** → Para que no caigas en las trampas más comunes.

¿Cómo estudiar este libro?

La mejor forma de estudiar con este libro es siguiendo el **orden de los capítulos** y haciendo cada derivada por tu cuenta antes de mirar la solución. Intenta resolver cada ejercicio, aunque no estés seguro, y luego compara tu resultado con la explicación paso a paso.

No memorices fórmulas, entiende la lógica detrás de cada regla y aprende a aplicarlas. A medida que avances, notarás que cada vez necesitas menos tiempo para resolver los ejercicios y te sabrás todas las fórmulas sin esfuerzo.

Consejos para sacarle el máximo provecho:

- **Estudia en un lugar sin distracciones**, *full focused*, sin móvil, sin notificaciones.
- **Haz cada ejercicio** antes de mirar la solución.
- **Si te equivocas, revisa el paso donde fallaste** y vuelve a intentarlo sin mirar la solución.
- **Anota los errores** que cometas para no repetirlos.
- **Avanza poco a poco**, sin saltarte ejercicios, para construir una base sólida.
- **Usa el índice** para repasar rápidamente los temas que necesites reforzar.

Ponte a tope, concéntrate y avanza cada día. Si sigues este método, en pocos días habrás terminado el libro y dominarás las derivadas sin esfuerzo.

Recuerda: derivar es una habilidad, y como toda habilidad, se mejora con la práctica. Cuantas más derivadas hagas, más fácil te resultará.

¿Qué necesitas?

Solo papel, boli y ganas de aprender. No te preocupes si al principio lo ves un poco raro, es completamente normal. Pero te aseguro que, si sigues el libro con constancia, vas a notar la **mejora en muy poco tiempo**.

Así que ahora sí. Coge papel y boli, porque... ¡¡EMMPEZAMOOSSS!!

Capítulo 1

Introducción a las derivadas

¡Bienvenido! Empezamos con uno de los temas más densos, pero necesarios. Sé que este primer capítulo puede parecer un poco teórico y durillo de estudiar, pero te aseguro que es fundamental para que comprendas bien el concepto de derivada.

Dicho esto, quiero recordarte que este libro está diseñado para ser súper práctico, enfocado en la resolución de derivadas de forma eficiente y al grano. A partir del capítulo 2, nos lanzaremos a tope con las reglas y fórmulas que realmente te ayudarán a resolver cualquier derivada que te pongan.

Este capítulo es como el calentamiento antes de la acción: necesario y lo más breve que he podido. ¡Mucho ánimo! Una vez superado este tema, el resto es cuesta abajo y mucho más "divertido". ¡Vamooss!

1.1. ¿Qué es la derivada?

Para entender el concepto de derivada, es útil imaginar una función $f(x)$ y su gráfica en el plano. La **derivada** en un punto representa la **pendiente de la recta tangente** a la curva en ese punto. Visualmente, si la función crece rápidamente, la pendiente es mayor; si la función decrece, la pendiente es negativa; y si la función es constante, la pendiente es cero. En términos simples:

- La **pendiente de la recta tangente** a una curva en un punto nos indica la **tasa de cambio instantánea** (derivada) de la función en ese punto.

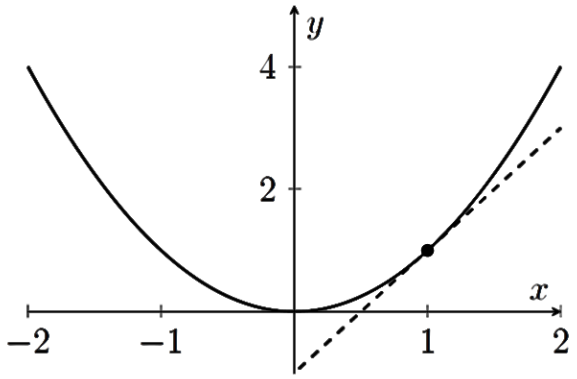


Figura 1.1: Gráfica de f(x) = x^2 con su tangente en x = 1.

- Si consideramos dos puntos muy cercanos sobre la curva, la pendiente de la recta que los une (la recta secante) se aproxima a la pendiente de la tangente a medida que los puntos se acercan entre sí.
  Dicho de otra forma, a medida que los puntos de la secante se aproximan entre sí, esta línea se convierte en la tangente en ese punto.

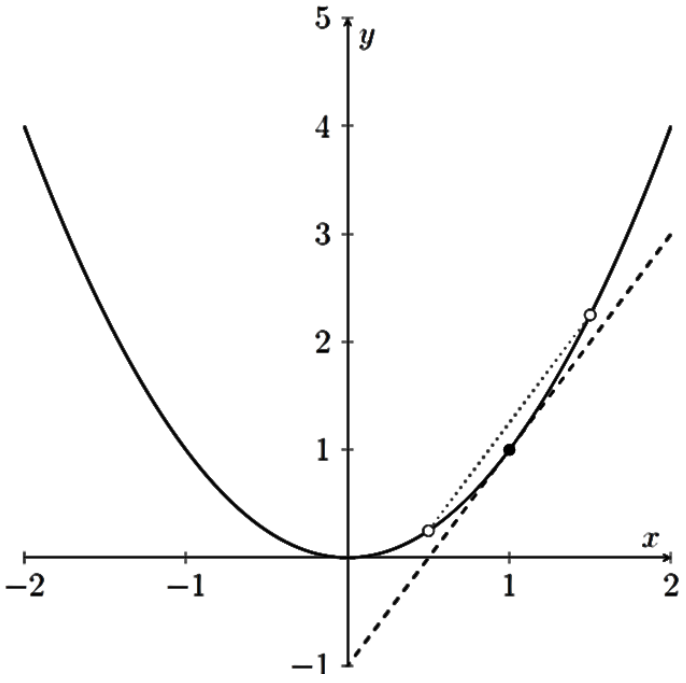


Figura 1.2: Gráfica de $f(x) = x^2$ con su tangente en $x = 1$ y una secante entre $x = 0,5$ y $x = 1,5$.

Resumen: La pendiente de la tangente en un punto es la **derivada** de la función en ese punto, que podemos calcular con el límite cuando los dos puntos están infinitamente cerca.

Nota importante:

Este libro está enfocado principalmente en la resolución de derivadas utilizando las reglas y fórmulas comunes, sin necesidad de aplicar límites en cada cálculo.

Sin embargo, como algunos profesores piden calcular la derivada de $f(x)$ mediante la definición en ciertos exámenes, en las próximas secciones de este capítulo explicaré, de manera breve, cómo calcular la derivada de una función en un punto a través de la definición, incluyendo algunos ejemplos, y también el concepto de función derivada usando esta misma definición.

A partir de los siguientes temas, nos centraremos en el cálculo de derivadas desde cero a experto utilizando directamente las fórmulas y las reglas más comunes. Con las reglas de derivación, los cálculos se pueden realizar de forma rápida y eficiente, lo que es esencial para resolver problemas complejos en cálculo y otras áreas de matemáticas.

1.2. Tasa de variación media (T.V.M.)

Antes de estudiar la derivada, te introduciré la **Tasa de Variación Media (T.V.M.)**. Este concepto mide el **cambio promedio** de una función en un intervalo $[a, b]$ y te ayudará a entender el concepto de derivada.

$$\text{T. V. M.}\,[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Esto representa la pendiente de la recta secante entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ en la curva.

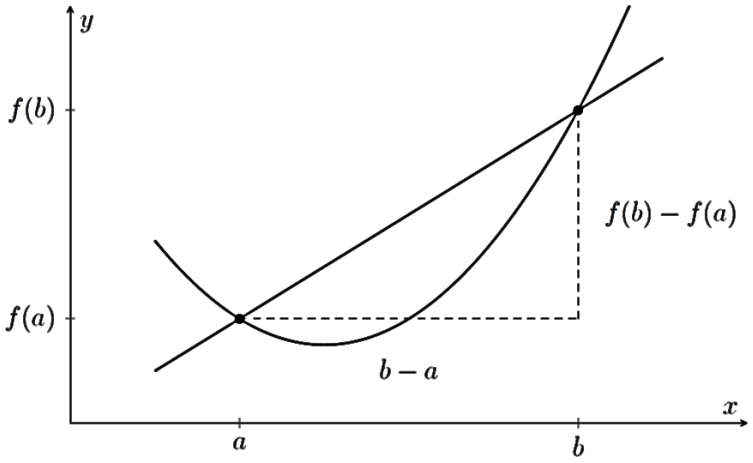


Figura 1.3: Gráfica de la Tasa de Variación Media (T.V.M.) en la función f(x) = x^2−3x+3 en el intervalo [a, b], con la recta secante y = x.

Nota: Si recuerdas cuando viste las funciones lineales del estilo $y = mx + n$, esta figura ilustra la aplicación de la fórmula de la pendiente $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, donde:

- $\Delta y = f(b) - f(a)$: Representa el cambio o incremento de y entre los puntos a y b.
- $\Delta x = b - a$: Representa el cambio o incremento de x entre los puntos a y b.

La Tasa de Variación Media, o pendiente de la recta secante, es entonces el cociente o división entre estos cambios: $\text{T. V. M.} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, lo cual muestra la variación promedio de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 1: Calcula la T.V.M. de la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el intervalo [1,3].

Paso 1. Calculamos los valores de la función en cada extremo del intervalo:

$$f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$$

$$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2$$

Paso 2. Sustituimos en la fórmula de la T.V.M.:

$$\text{T.V.M.}\,[1,3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

Ejemplo 2: Calcula la T.V.M. de la función $f(x) = x^3 - x$ en el intervalo $[-1,2]$.

Paso 1. Calculamos los valores de la función en cada extremo del intervalo:

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

$$f(2) = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$$

Paso 2. Sustituimos en la fórmula de la T.V.M.:

$$\text{T.V.M.}\,[-1,2] = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{6 - 0}{3} = 2$$

1.3. Derivada de una función en un punto por la definición

La **derivada en un punto** se define como el **límite de la T.V.M.** cuando el intervalo se hace infinitesimalmente pequeño. Esto se expresa de la siguiente forma:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esta fórmula representa la pendiente de la tangente a la curva en el punto a.

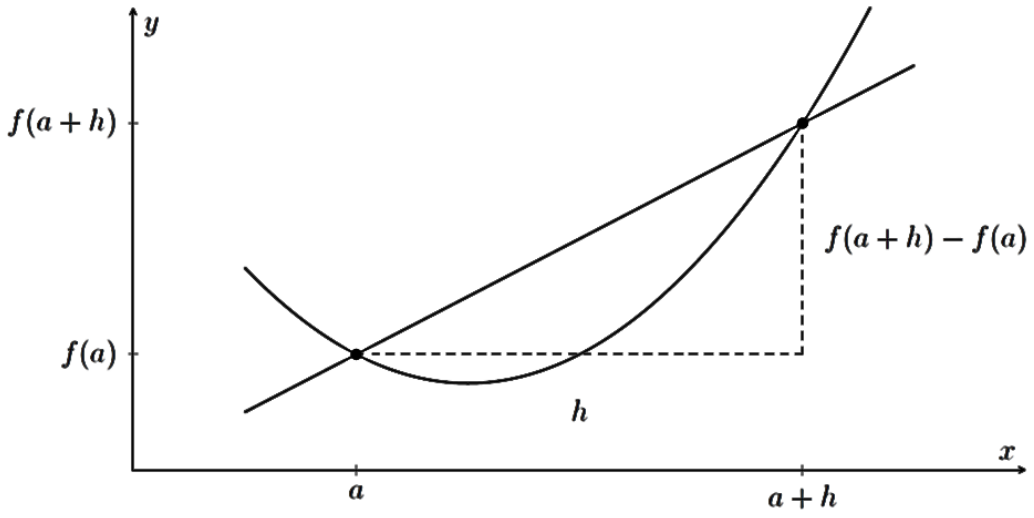


Figura 1.4: Gráfica de la Tasa de Variación Media (T.V.M.) en la función f(x) = x^2−3x+3 en el intervalo [a, a + h], con la recta secante y = x.

Nota: Cuando decimos que $h \to 0$, significa que el intervalo entre a y $a + h$ se hace cada vez más pequeño, acercándonos al punto a. En este caso, la secante entre a y $a + h$ se convierte en la tangente en el punto a. Observa que, al acercarnos a este límite, la pendiente de la tangente resultante se aproximará a un valor negativo.

Vamos ahora con unos ejemplos prácticos numéricos para ver cómo aplicar esta definición y ayudarte a consolidar el concepto. ¡Ya verás que es más sencillo de lo que parece!

Ejemplo 1: Calcula la derivada de $f(x) = x^2 - 4x$ en $x = 2$ usando la definición.

Paso 1. Calculamos $f(2)$ y $f(2+h)$:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$$

$$f(2+h) = (2+h)^2 - 4(2+h) = 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h = h^2 - 4$$

¡Atención! Vigila con la identidad notable en el $(2+h)^2$ que es igual a $4 + 4h + h^2$.

Nota: En $f(2+h)$, estamos sustituyendo x por $2+h$ en la función original. Es decir, cada vez que aparece x en $f(x)$, lo reemplazamos por $2+h$. Así, x^2 se sustituye por $(2+h)^2$, y en $-4x$ se reemplaza por $-4(2+h)$.

Paso 2. Aplicamos la definición de derivada:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^2 - 4) - (-4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

Ejemplo 2: Calcula la derivada de $f(x) = -2x^2 + x + 1$ en $x = 1$ usando la definición.

Paso 1. Calculamos $f(1)$ y $f(1+h)$:

$$f(1) = -2 \cdot 1^2 + 1 + 1 = -2 + 1 + 1 = 0$$

$$f(1+h) = -2(1+h)^2 + (1+h) + 1 = -2(1 + 2h + h^2) + (1+h) + 1 =$$

$$= -2 - 4h - 2h^2 + 1 + h + 1 = -2h^2 - 3h$$

Paso 2. Aplicamos la definición de derivada:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-2h^2 - 3h) - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2h - 3)}{h} = \lim_{h\to 0} -2h - 3 = -3$$

Nota: Al sustituir directamente $h = 0$ en el límite con fracción $\frac{(-2h^2-3h)-0}{h}$, obtenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$. Para resolver esto, sacamos factor común h en el numerador y el denominador, lo que nos permite simplificar la expresión eliminando una h de "arriba" y otra de "abajo". Luego, volvemos a sustituir $h = 0$ para obtener el resultado final. Este procedimiento pertenece al tema de límites. En los siguientes ejemplos lo aplicaré directamente sin detallar cada paso.

1.4. Función derivada por la definición

La **derivada de una función** $f(x)$ es una función que asigna a cada número real el valor de su cambio instantáneo (o derivada), si existe. Se escribe como $f'(x)$ y se calcula con la siguiente fórmula de límite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Esta fórmula nos permite encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto de la función.

Nota: En la sección anterior, aprendimos cómo encontrar la derivada en un punto específico a, escribiéndola como $f'(a)$. Esto nos daba la pendiente de la tangente en ese punto solamente. Ahora, en esta sección, veremos cómo encontrar la derivada para cualquier punto x de la función. Esto significa que en lugar de calcular la pendiente en un solo punto, estamos encontrando una nueva función, llamada $f'(x)$, que nos da la pendiente en cualquier punto de la curva.

Vamos ahora con unos ejemplos prácticos numéricos y en breve empezamos con el plato fuerte, las reglas y fórmulas de las derivadas. ¡Mucho ánimo!

Ejemplo 1: Calcula la derivada de $f(x) = 3x - 2$ usando la definición.

Paso 1. Calculamos $f(x+h)$:

$$f(x+h) = 3(x+h) - 2 = 3x + 3h - 2$$

Paso 2. Aplicamos la fórmula de la derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3x + 3h - 2) - (3x - 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

Ejemplo 2: Calcula la derivada de $f(x) = x^2 - 4x + 1$ usando la definición.

Paso 1. Calculamos $f(x+h)$:

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 4(x+h) + 1 = x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 1$$

Paso 2. Aplicamos la fórmula de la derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 1) - (x^2 - 4x + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 - 4h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x + h - 4)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h - 4) = 2x - 4$$

Ejemplo 3: Calcula la derivada de $f(x) = -x^2 + 4x$ usando la definición.

Paso 1. Calculamos $f(x+h)$:

$$f(x+h) = -(x+h)^2 + 4(x+h) = -x^2 - 2xh - h^2 + 4x + 4h$$

Paso 2. Aplicamos la fórmula de la derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-x^2 - 2xh - h^2 + 4x + 4h) - (-x^2 + 4x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2 + 4h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-2x - h + 4)}{h} = \lim_{h\to 0} (-2x - h + 4) = -2x + 4$$

Ejemplo 4: Calcula la derivada de $f(x) = -4x - 3$ usando la definición.

Paso 1. Calculamos $f(x+h)$:

$$f(x+h) = -4(x+h) - 3 = -4x - 4h - 3$$

Paso 2. Aplicamos la fórmula de la derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-4x - 4h - 3) - (-4x - 3)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{h} = \lim_{h\to 0} -4 = -4$$

Si has llegado hasta aquí, **enhorabuena**, acabas de superar la parte más dura del libro, ahora todo es cuesta abajo con más números y más práctica, mucho más "divertido".

Sigue así, con constancia y muchas ganas, esto marca la diferencia. Te dejo por aquí una de mis frases favoritas:

"La constancia es la base del éxito."